Homotopy commutativity of the loop space of a finite CW-complex

可知, 偉行

数理解析研究所講究録
第720巻 1990年 103-112

Homotopy commutativity of the loop space of a finite CW-complex

信大理　可知　偉行（Hideyuki Kachi）

1. 基点をもつ位相空間 X において，基点を基点にうつす連続写像 $\mu : X \times X \to X$ が与えられ，対角写像 $\Delta : X \to X \times X$ と基点への定値写像 $0 : X \to X$ に対して，二つの合成写像 $\mu(1_X \times 0)\Delta$ と $\mu(0 \times 1_X)\Delta$ が共に恒等写像 $1_X : X \to X$ にホモトープのとき，$X = (X, \mu)$ を積 μ をもつホップ空間（H-空間）と呼ぶ。

さらに，成分の順序を交換する同相写像 $T : X \times X \to X \times X$ に対して，合成写像 μT が μ にホモトープのとき，X は μ に関してホモトピー可換であるという。

コンパクト，連結リー群 G は，その積により H-空間とみなすことができるが，荒木-James-Thomas [1] により，G がホモトピー可換であるためには，G が可換群，すなわち，トーラス群であることが必要十分条件であることが示され，さらに一般に，連結有限 CW 複体がホモトピー可換なホップ

空間ならば，それはトーラスのホモトピー型をもつことが，Hubbuck [4] により証明された。

基点をもつ CW 複体 X の閉道空間 $\Omega X=\{\omega: I\to X, \omega(0)=\omega(1)=*\}$ に対して，閉道積 $\mu: \Omega X\times\Omega X\to\Omega X$，$\mu(\omega_1,\omega_2)=\omega_1\cdot\omega_2$ を

$$(\omega_1\cdot\omega_2)(t)=\begin{cases}\omega_1(2t) & 0\leq t\leq 1/2\\ \omega_2(2t-1) & 1/2\leq t\leq 1\end{cases}$$

で定義する。　このとき，$(\Omega X, \mu)$ はホモトピー結合的ホップ空間である。

我々は，2-cells 又は 3-cells をもつ CW 複体 X について，閉道積に関する閉道空間 ΩX のホモトピー可換性について研究する。

交換子写像 $\varphi: \Omega X\times\Omega X\to\Omega X$ を

$$\varphi(\omega_1,\omega_2)=(\omega_1\cdot\omega_2)\cdot(\omega_1^{-1}\cdot\omega_2^{-1})$$

で定義する。　$\varphi|_{\Omega X\vee\Omega X}\simeq *$ であることより，$\varphi\simeq\bar{\varphi}\cdot p$ をみたす写像 $\bar{\varphi}: \Omega X\wedge\Omega X\longrightarrow\Omega X$ が誘導される。但し，p: $\Omega X\times\Omega X\longrightarrow\Omega X\wedge\Omega X$ は自然な射影である。

次の補題は明らかである。

補　題 1.1.　ΩX がホモトピー可換 $\Longleftrightarrow\varphi\simeq *$

$$\Longleftrightarrow\bar{\varphi}\simeq *$$

定義 1.2.　写像 $f: \Sigma A\to X$，$g: \Sigma B\longrightarrow X$ の Whitehead 積 $[f, g]$ を次により定義する。

$$[f, g] = \Omega_0^{-1}(\overline{\varphi}(\Omega_0 f \wedge \Omega_0 g))$$

但し，$\Omega_0 : Map_*(\Sigma Z, X) \longrightarrow Map_*(Z, \Omega X)$ である。

補　題 1.3. 次は同値である（参 [2], [7]）

(i)　ΩX はホモトピー可換である。

(ii)　任意の CW 複体 A, B と任意の写像 $f : \Sigma A \to X$, $g : \Sigma B \to X$ に対して，Whitehead 積 $[f, g]$ は自明である。

(iii)　(ii) の条件のもと，$\Psi|_{\Sigma A \times *} \simeq f$, $\Psi|_{* \times \Sigma B} \simeq g$ をみたす写像 $\Psi ; \Sigma A \times \Sigma B \to X$ が存在する。（このような写像 Ψ を type (f, g) の写像という）

(iv)　$d : \Sigma\Omega X \to X$ を $1_{\Omega X} : \Omega X \longrightarrow \Omega X$ の随伴写像とするとき，type (d, d) の写像 $\Psi : \Sigma\Omega X \times \Sigma\Omega X \to X$ が存在する。

2.

X がホップ空間ならば，閉道空間 ΩX はホモトピー可換であることは良く知られており，逆は一般に成り立たない。それの例として，

例 1.　$\Omega CP(3)$ はホモトピー可換である（[7]）

例 2.　X を $CP(2)$ に包体を接着して，6 次元以上のホモトピー群を消した空間とするとき，X はホップ空間でないが，ΩX はホモトピー可換である（[3]）

球面 S^n に対しては，S^n がホップ空間であることと，ΩS^n が

ホモトピー可換であることは同値であるが，一般の形として，

命 題 2.1. Aを弧状連結CW複体とし，$X=\Sigma A$とする。Xは可縮でないとする。 このとき

$$\Omega X \text{ がホモトピー可換} \Longleftrightarrow X \simeq S^3 \text{ 又は } S^7.$$

証明. ΩXがホモトピー可換とすると，命題1.3.により，恒等写像$1_X : \Sigma A = X \to X$のWhitehead積$[1_X, 1_X]=0$，即ちtype$(1_X, 1_X)$の写像が存在する。従ってXはホップ空間であり，かつco H-空間であるから，West [8]により求める結果をえる。

命題 2.2. $X=S^n/\mathbb{Z}_m$をレンズ空間とする。$(n\geqq 2)$

$$\Omega X \text{ がホモトピー可換である} \Longleftrightarrow n=3 \text{ 又は } 7.$$

証明 被覆空間 $\mathbb{Z}_m \to S^n \xrightarrow{p} X$ を考え，被覆変換群，$p^{-1}(*)$ 基本群$\pi_1(X)$を同一視する。 $S^n \supset \mathbb{Z}_m \ni a$に対して，$l_a$: $I \to S^n$で，$l_a(0)=*$，$l_a(1)=a$ となる path l_a を各$a \in \mathbb{Z}_m$に対応して，固定しておく。

$g : \mathbb{Z}_m \to \Omega X$ を $g(a) = p\cdot l_a$ で定義すると，gはH-写像である。 さらにホモトピー同値写像

$$\varphi : \Omega S^n \times \mathbb{Z}_m \to \Omega X \qquad \varphi(\tilde{\omega}, a) = (p\cdot\tilde{\omega})\cdot(p\, l_a)$$

がえられ，これは H-写像である。 従ってΩXがホモトピー可換 $\Leftrightarrow \Omega S^n \times \mathbb{Z}_m$はホモトピー可換 $\Leftrightarrow n=3, 7$.

3. $k \geqq 2$ とし, $\alpha \in \pi_{n-1}(S^k)$ の mapping cone を $X = S^k \cup_\alpha e^n$ とおく。このとき次のことが成り立つ.

命題 3.1. ΩX がホモトピー可換 $\Leftrightarrow$ X は可縮である。

以下4つの場合に分けて証明する。

(1) $\alpha = 0$ のとき, $X = S^k \vee S^n$ で, 包含写像 $i_1 : S^k \to X$, $i_2 : S^n \longrightarrow X$ に対して Whitehead 積 $[i_1, i_2] \in \pi_{n+k-1}(X)$ は自明でない。従って補題 1.3 により ΩX はホモトピー可換でない。

(2) $\alpha = s\iota_k$ $(s \neq 0, 1)$, $\iota_k \in \pi_k(S^k) \cong \mathbb{Z}$. のとき, X は suspension 型であるから命題 2.1 により ΩX はホモトピー可換でない。特に $L' = S^{k-1} \cup_s e^k$, $X = \Sigma L'$ とおくとき, Whitehead 積 $[1_X, 1_X] \in \pi(\Sigma(L' \wedge L'), X)$ は自明でない。

(3) α が有限位数のとき, $n-1 > k$ が成り立つ。包体 e^n の characteristic map を $\bar{\alpha} : (V^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X, S^k)$ で表わし, α の位数を t_α とする。包含写像 $j : X \to (X, S^k)$ に対して, $j_*(\gamma) = t_\alpha \bar{\alpha}$ をみたす $\gamma \in \pi_n(X)$ が存在する。

$i : S^k \to X$ を包含写像とするとき, Whitehead 積 $[i_* \iota_k, \gamma] \in \pi_{n+k-1}(X)$ は infinite order である。

(4). α が infinite order のとき, k; even, $n = 2k$ である. このとき次のことが成り立つ。

補題 3.2. 包含写像 $i ; S^k \to X$ に対して, Whitehead 積

$[i, i]=0$ ならば，Hopf不変量 $H(\alpha)=\pm 1, \pm 2$ である。

従って，$H(\alpha) \neq \pm 1, \pm 2$ ならば，X はホモトピー可換でない。

α が $H(\alpha)=\pm 1$ をみたすならば，$(k, n)=(2,4),(4,8)$ 又は $(8,16)$ である。

$k=2$, $H(\alpha)=\pm 1$ のとき，X は複素射影平面 $CP(2)$ とホモトピー同値であり，$\pi_q(X)$ に自明でない Whitehead 積をもつ。

$k=4,8$ かつ $H(\alpha)=\pm 1$ のとき，$\eta_k \in \pi_{k+1}(S^k)$ に対して，$[\eta_k, \iota_k] \neq 0$，$\alpha \cdot \eta_{2k-1} \neq [\eta_k, \iota_k]$ in $\pi_{2k}(S^k)$．従って完全列

$$\pi_{2k}(S^{2k-1}) \xrightarrow{\alpha_*} \pi_{2k}(S^k) \xrightarrow{i_*} \pi_{2k}(X)$$

において，$[\eta_k, \iota_k] \notin \ker i_*$．即ち $[i\eta_k, i] \neq 0$ in $\pi_{2k}(X)$.

以上により，α が $H(\alpha)=\pm 1$ ならば ΩX はホモトピー可換でない。

次に $H(\alpha)=\pm 2$ をみたすとき i.e. $\alpha=\pm[\iota_k, \iota_k] \in \pi_{2k-1}(S^k)$ の場合について考える。

X，$\Sigma\Omega X$ の $\mathbb{Z}_2$-係数 cohomology 群は次のような additive base をもつ

$$H^*(X;\mathbb{Z}_2)=\{e_k,\ e_{2k}\},\quad e_k^2=0$$

$$H^*(\Sigma\Omega X;\mathbb{Z}_2)=\{x_k, y_{2k-1}, x_{2k}, y_{3k-3}, y_{3k-2}, \cdots\cdots\}$$

但し $\deg e_s=s$, $\deg x_s=s$, $\deg y_s=s$.

$d: \Sigma\Omega X \to X$ を $1_{\Omega X}: \Omega X \to \Omega X$ の随伴写像とするとき

$$d^*(e_k)=x_k,\quad d^*(e_{2k})=x_{2k}$$

が成り立つ。

補題1.3により，ΩX がホモトピー可換ならば，type(α,α) である写像 $\Psi: \Sigma\Omega X \times \Sigma\Omega X \to X$ が存在する。このとき

$$0 = \Psi^*(e_k \cdot e_{2k}) = \Psi^*(e_k) \cdot \Psi^*(e_{2k})$$
$$= x_k \otimes x_{2k} + x_{2k} \otimes x_k$$
$$\neq 0$$

従って ΩX はホモトピー可換ではない。

4. 次の形をもつCW複体 X について，ΩX の可換性を考える。

(4.1) $X = S^k \cup_\alpha e^n \cup_\beta e^{n+m}$

但し $\alpha \in \pi_{n-1}(S^k)$, $\beta \in \pi_{n+m-1}(S^k \cup_\alpha e^n)$.

補題4.1 (4.1)の X に対して，$2 \leq k \leq n$, $m \geq 2$, かつ $\alpha \in \pi_{n-1}(S^k)$ は有限位数又は0とする。もし $m \neq k$ ならば，ΩX はホモトピー可換でない。

証明　完全列

$$\pi_{n+k-1}(S^{n+m-1}) \xrightarrow{\beta_*} \pi_{n+k-1}(S^k \cup_\alpha e^n) \xrightarrow{i_*} \pi_{n+k-1}(X)$$

において，$\pi_{n+k-1}(S^{n+m-1})$ は有限又は自明である。

一方補題3.1の証明の(1)(3)により，$\pi_{n+k-1}(S^k \cup_\alpha e^n)$ は無限位数の Whitehead 積を含む。従って上の完全列と Whitehead 積

の自然性により，$\pi_{n+k-1}(X)$は自明でないWhitehead積をもつ。

系 4.2. $X=(S^k\vee S^n)\cup_\beta e^{n+k}$ とする。このとき
ΩX がホモトピー可換 $\Leftrightarrow \{k,n\}\subset\{3,7\}$ かつ $\beta=[i_1,i_2]$

証明 $\beta\neq[i_1,i_2]\Rightarrow\Omega X$ はhomotopy可換でない.
$\beta=[i_1,i_2]\Leftrightarrow X\simeq S^k\times S^n$.

命題 4.3. (4.1)の X に対して，$3\leq k=n-1$，$m\geq 1$，$\alpha=s\iota_k$ ($s\neq0.1$) とし，$m\neq k$ ならば，ΩX はホモトピー可換でない。

証明 (i) $m\leq k-2$ ならば X はsuspension型である。
(ii) $m=k-1$ 又は $m=k+1$ のとき； p を s と素な素数とする。p による X の局所化を考えると，$(S^k\cup_s e^{k+1})_p\simeq *$ であるから，$X_p\simeq S_p^{2k}$ 又は S_p^{2k+2} である. ΩX_p はホモトピー可換でないから ΩX もそうである。
(iii) $m\geq k+2$ のとき； $L=S^k\cup_s e^{k+1}$ とおき, $j:L\to X$ を包含写像とする。命題3.1の証明(2)とWhitehead積の自然性，及び，$j_*:\pi(\Sigma(L'\wedge L'),L)\longrightarrow\pi(\Sigma(L'\wedge L'),X)$ が単射であることよりWhitehead積 $[j,j]$ は自明でない。

注：(1) $m=k$, sが奇数のとき ΩX はホモトピー可換でない。
(2) $s=1$ のときは $X\simeq S^{k+1+m}$

命題4.4. (4.1) の X において，$n=2k$, k : even, $m\geq 2$, α は無限位数であるとき，次の各々の場合に ΩX はホモトピー可換ではない。

(i) Hopf不変量 $H(\alpha)\neq\pm 1, \pm 2$

(ii) $k=2$, $H(\alpha)=\pm 1$, $m\geqq 7$.

(iii) $k=4, 8$ かつ $H(\alpha)=\pm 1$.

(iv) $H(\alpha)=\pm 2$, $m\neq k$.

証明 (i) は補題3.2 による。 (ii) (iii) は命題3.1 (4) の前半の証明による。 (iv) は命題3.1 (4) の後半の証明と同様に.

次元 k, n, $n+k$ に cell をもつ CW 複体について，特に E を S^k-bundle over S^n ($k\geqq 2$) とするとき，bundle の特性写像と bundle のホモトピー完全列等をつかうことにより，次の結果がえられる。

命題4.5. E を S^n 上 S^k-bundle とする ($k\geqq 2$). k 又は n は偶数で $(k, n)\neq(3, 4)$ とする

$$\Omega E \text{ がホモトピー可換} \Leftrightarrow E\simeq CP(3)$$

これに関連して，最近の岩瀬－三村 [5] の結果として，

" $k, n, n+k$ に cell を各1つもつ Poincaré complex E に対して ΩE がホモトピー可換 $\Rightarrow \{k, n\}\subset\{1, 3, 7\}$ 又は $(k, n)=(1, 2)$,

(2,4), (3,4) 又は (3,5)"

References

[1] S. Araki, I.M. James and E. Thomas, Homotopy abelian Lie groups, Bull. A.M.S. 66 (1960) 324–326

[2] M. Arkowitz, The generalized Whitehead product, Pacific J. Math. 12 (1962) 7–23

[3] I. Berstein and T. Ganea, Homotopical nilpotency, Ill. J. Math. 5 (1961) 99–130

[4] J.R. Hubbuck, On homotopy commutative H-space, Topology 8 (1969) 119–126

[5] N. Iwase and M. Mimura, Generalized Whitehead spaces with few cells. to appear

[6] H. Kachi, Homotopy commutativity of the loop spaces of a finite CW-complex, Hiroshima Math. J (1990)

[7] J. Stasheff, On homotopy abelian H-spaces, Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961) 734–745

[8] R.W. West, H-spaces which are co H-spaces, Proc. A.M.S. 31 (1972) 580–582